Αξιοσημείωτες συνέπειες του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΤΕΣ

Εμμανουήλ Βρετουδάκης, Θεοδοσία Γλακουσάκη,
Βασιλική Τζιράκη

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Δημήτρης Καλυκάκης, Μαθηματικός

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

- Πότε ένα πολυώνυμο θεωρείται ότι είναι πλήρως παραγοντοποιημένο;
- Πώς αναλύεται μια ρητή παράσταση σε απλά κλάσματα;
- Μπορεί το θεώρημα του Bolzano να αποδειχθεί με στοιχειώδη τρόπο στην περίπτωση των πολυωνύμων;
- Τί μορφή έχει η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης τρίτου βαθμού;

ΙΣΤΟΡΙΑ ΠΙΣΩ ΑΠΟ ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Albert Girard (1595-1632): «κάθε εξίσωση της άλγεβρας διαθέτει τόσες λύσεις όσες υποδηλώνει ο εκθέτης του ανώτερου όρου»

Απόπειρες:

Cardano, Descartes, Viete, Leibniz, Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace

Πρώτη «αυστηρή» απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρή-ματος της Άλγεβρας: Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Κάθε μη-σταθερό πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές παραγοντοποιείται σε παράγοντες πρώτου ή/και δευτέρου βαθμού με αρνητική διακρίνουσα.

$$\mathrm{P}(x)=\alpha_\nu x^\nu+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0 \quad , \alpha_\nu \neq 0$$

$$\mathrm{P}(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)\cdot\cdots\cdot(x-\rho_\kappa)\cdot(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)\cdot\cdots\cdot(x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda)$$

Όπου ρ, β, γ είναι κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί,

$${\beta_i}^2-4\gamma_i<0 \ \ (i=0,1,\ldots,\lambda) \ \text{ και } \ \kappa+\lambda=\nu$$

ΠΛΗΡΗΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Ένα πολυώνυμο είναι πλήρως παραγοντοποιημένο όταν:

Έχει μετατραπεί σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων και πολυωνύμων δευτέρου βαθμού με αρνητική διακρίνουσα.

ΠΛΗΡΗΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Παραδείγματα

- $x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$, πλήρης παραγοντοποίηση.
- $x^4 - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)$, μη πλήρης
- $x^4 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$, πλήρης
- $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 =$
  $=\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right) \cdot \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)$,
  παραγοντοποίηση πολυωνύμου χωρίς πραγματικές ρίζες

ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Απλά κλάσματα ονομάζονται τα κλάσματα της μορφής:

$$\frac{A}{(x-\rho)^{\kappa}} \quad \text{η'} \quad \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^{\lambda}}$$

όπου όλοι οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί, το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και οι εκθέτες είναι φυσικοί αριθμοί.

π.χ. $\frac{1}{x+3}, \quad \frac{3}{(x-5)^3}, \quad \frac{3x-4}{x^2+x+6}, \quad \frac{x}{(2x^2+3x+5)^4}.$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΗΤΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

«Κάθε ρητή παράσταση που ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή, γράφεται ως άθροισμα ενός πολυωνύμου και απλών κλασμάτων».

Παράδειγμα

- Να γραφεί η ρητή παράσταση $\frac{1}{x^2+x}$ ως άθροισμα απλών κλασμάτων

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = A(x+1) + Bx \quad \Leftrightarrow \quad (A+B)x + A = 0x + 1$$

A + B = 0

A = 1

$\Rightarrow$

A = 1

B = -1

$$\boxed{\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΗΤΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

- Τί γίνεται στη περίπτωση που ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του παρονομαστή;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \mu\varepsilon\ \beta\alpha\theta \mathrm{P}(x) \geq \beta\alpha\theta Q(x)$$

$$P(x) = Q(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$$

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO

«Αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f δεν έχει σταθερό πρόσημο, τότε έχει τουλάχιστον μία (πραγματική) ρίζα»

<u>Απόδειξη με χρήση:</u>

- Της αρχής της αντιθετοαντιστροφής :

(αν p,q είναι δύο προτάσεις, τότε έχουμε αποδείξει ότι p => q αν αποδείξουμε ότι (όχι q) => (όχι p))

Μπέρναρντ Μπολζάνο (1781-1848)

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO

ΑΝ η συνάρτηση f δεν έχει σταθερό πρόσημο ΤΟΤΕ η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μια ρίζα

ΑΝ η συνάρτηση f δεν έχει καμία ρίζα ΤΟΤΕ η συνάρτηση f έχει σταθερό πρόσημο

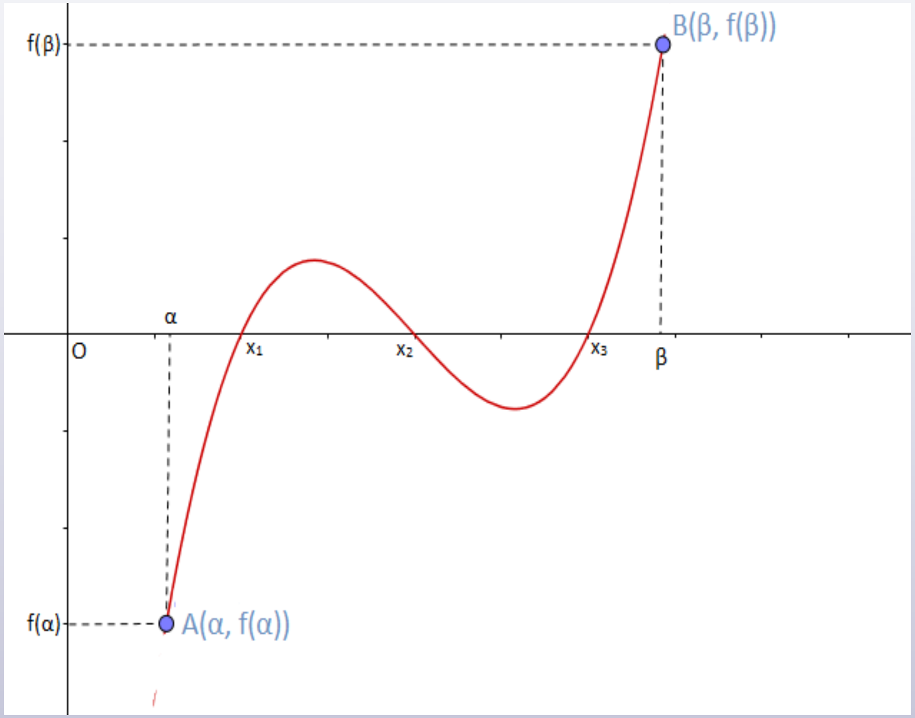
Όμως, κάθε πολυωνυμική συνάρτηση, από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, γράφεται στη μορφή

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 =$$
$$= \alpha_\nu \cdot \cancel{(x-\rho_1)\cdot \cdots \cdot (x-\rho_\kappa)} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1) \cdot \cdots \cdot (x^2 + \beta_\lambda x + \gamma_\lambda)$$

Αλλά αφού ${\beta_i}^2 - 4\gamma_i < 0$ $(i = 0,1,\ldots,\lambda)$, όλα τα παραπάνω τριώνυμα είναι μονίμως θετικά και άρα η f έχει σταθερό πρόσημο, το πρόσημο του συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου.

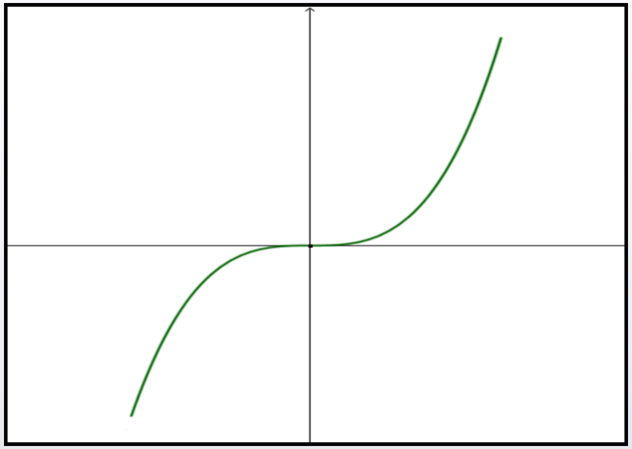
ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO

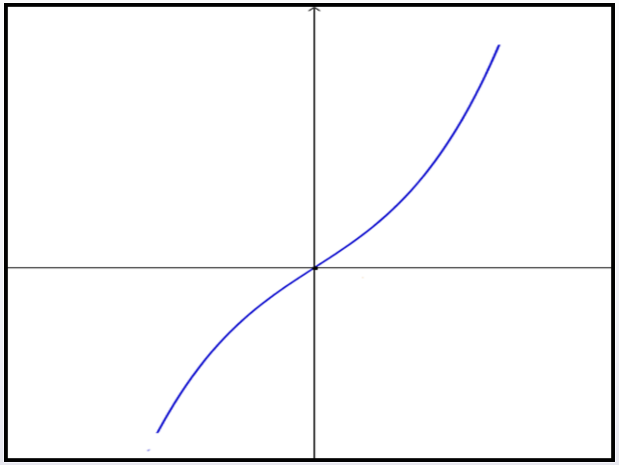
Θεώρημα (του Bolzano - αναδιατύπωση): Αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ οι τιμές f(α) και $f(\beta)$ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f είναι ετερόσημες, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ μεταξύ των α, β

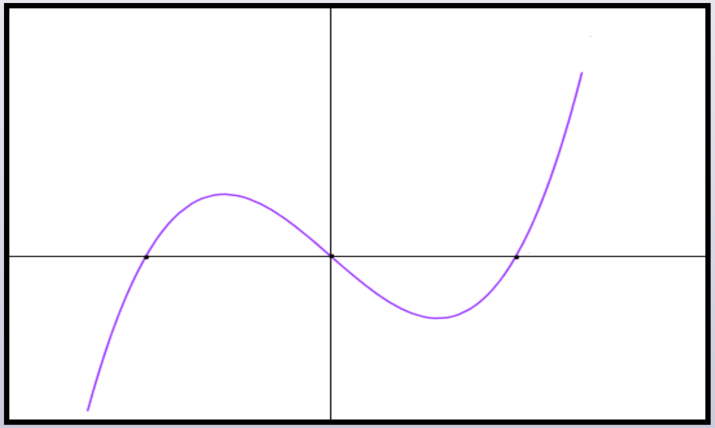


Γεωμετρική αναπαράσταση του θεωρήματος του Bolzano

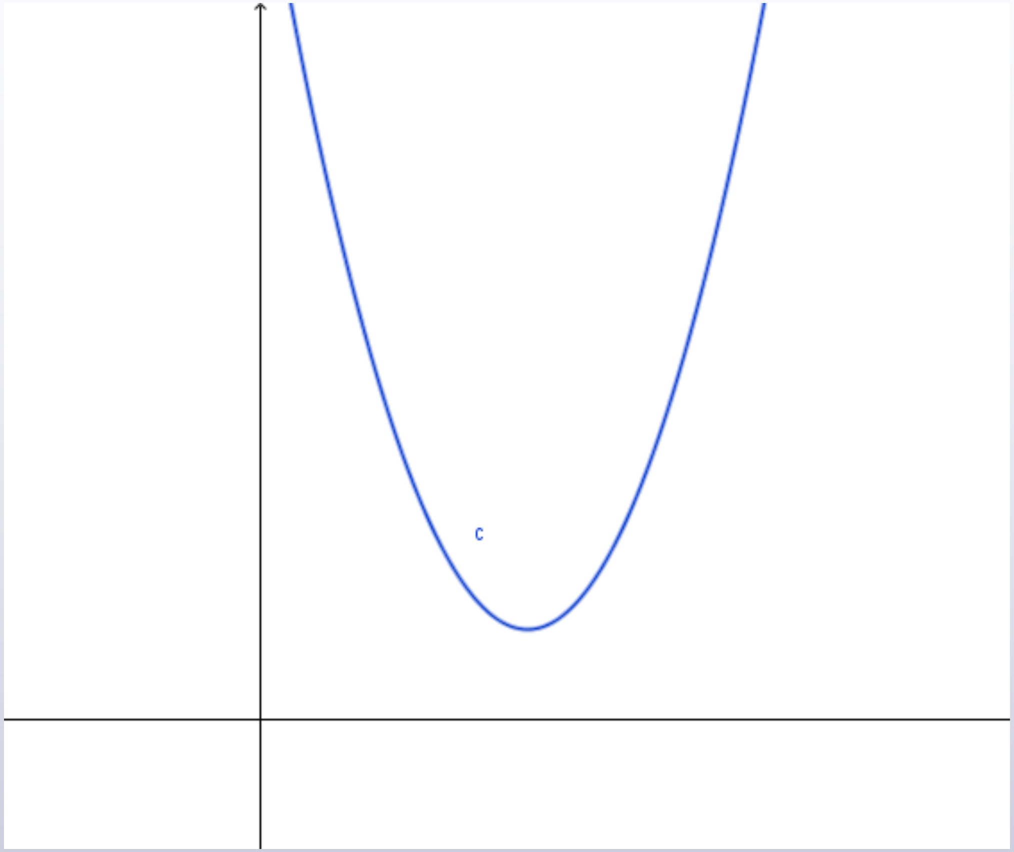
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 3ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ







ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 2ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ



ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 3ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις τρίτου βαθμού ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα (συμπλήρωση σε τέλειο κύβο – απαλοιφή δευτεροβάθμιου όρου):

$$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=\alpha\left(x+\frac{\beta}{3\alpha}\right)^3+\left(\gamma-\frac{\beta^2}{3\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{3\alpha}\right)+\left[\frac{\beta}{3\alpha}\left(\frac{2\beta^2}{9\alpha}-\gamma\right)+\delta\right]$$

Άρα η γραφική παράσταση κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης τρίτου βαθμού προκύπτει από οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης με τύπο:

$$\boldsymbol{\alpha x^3+\lambda x}$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 3ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{x^3+\lambda x}$:

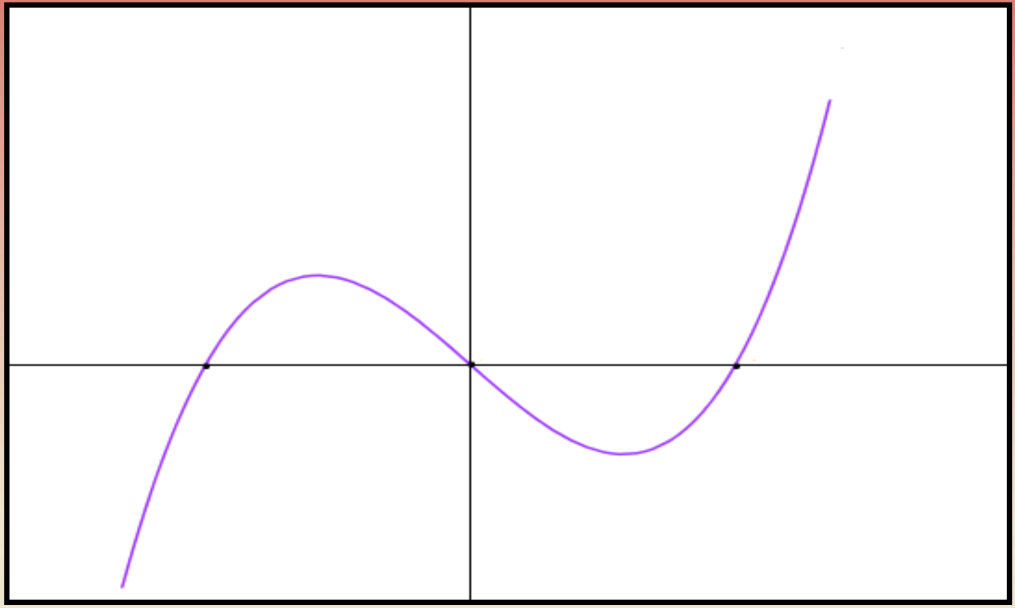
α) Είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων για όλες τις τιμές του λ, **ως περιττή.**

β) Εξαρτάται από την πλήρη παραγοντοποίηση του τύπου της.

Για τις διάφορες τιμές του λ, ο τύπος της συνάρτησης παραγοντοποιείται πλήρως ως εξής:

$$f(x) = x^3 + \lambda x = \begin{cases} x(x^2+\lambda) & \text{αν } \lambda > 0 \\ x^3 & \text{αν } \lambda = 0 \\ x(x+\sqrt{-\lambda})(x-\sqrt{-\lambda}) & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 3ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

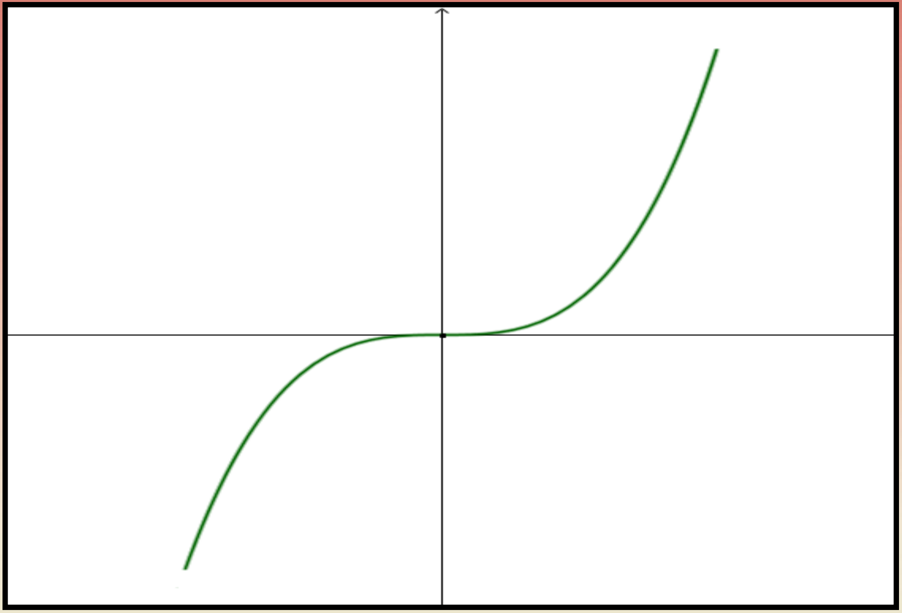


Σχήμα 1

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο:

$$\mathrm{f}(x) = x\left(x+\sqrt{-\lambda}\right)\left(x-\sqrt{-\lambda}\right), \quad \text{με } \lambda < 0.$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 3ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

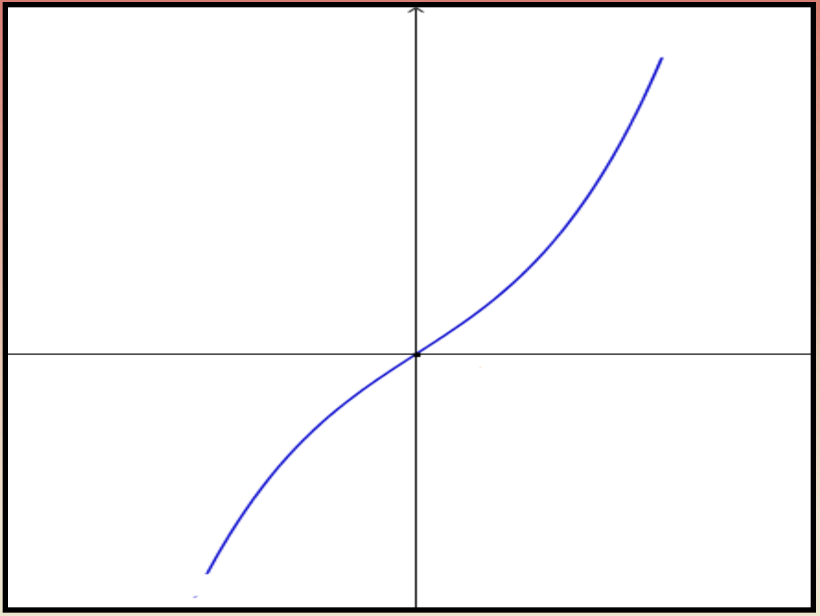


Σχήμα 2

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο:

$$\mathrm{f}(x) = x^3$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 3ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ



Σχήμα 3

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο:

$$f(x) = x(x^2 + \lambda), \quad \mu\varepsilon\, \lambda > 0.$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Διαπιστώσαμε ότι ένα πολυώνυμο είναι πλήρως παραγοντοποιημένο όταν έχει μετατραπεί σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων και πολυωνύμων δευτέρου βαθμού με αρνητική διακρίνουσα.

Δείξαμε ότι κάθε ρητή παράσταση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός πολυωνύμου και απλών κλασμάτων

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αποδείξαμε το θεώρημα του Bolzano στη περίπτωση των πολυωνύμων

Δείξαμε ότι η γραφική παράστασή των πολυωνυμικών συναρτήσεων τρίτου βαθμού αντιστοιχεί σε ένα από τα τρία μοτίβα των σχημάτων 1,2,3 μετά από οριζόντια/κατακόρυφη μετατόπιση και ανάκλαση ως προς τον x΄x άξονα

Ευχαριστούμε πολύ για την προσοχή σας!

Ευχαριστούμε τις χορηγίες μας: ANEK LINES και BLUE STAR FERRIES