Τα μαθηματικά θεωρήματα μέσα από αποδείξεις Μηχανικής

Παρασκευή-Ανδριάννα Μαρούτσου
Πρότυπο Γυμνάσιο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Μεταξάς, Δρ. Μαθηματικών
Θεματική Ενότητα: Μαθηματικά

Εισαγωγή

- Ο σκοπός της έρευνας είναι η αναζήτηση για την ύπαρξη διασυνδέσεων μεταξύ μαθηματικού και φυσικού κόσμου, επομένως μεταξύ θεωρητικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, και η δυνατότητα απόδειξης θεωρητικών μαθηματικών με τη βοήθεια των εφαρμοσμένων, ειδικότερα της Μηχανικής.
- Ερευνήθηκε με βιβλιογραφική αναζήτηση.

Η μαθηματική απόδειξη

Ορισμός

- Η απόδειξη είναι μια σειρά συλλογισμών που διαδέχεται λογικά ο ένας τον άλλον, ο καθένας βασίζεται στον προηγούμενο ή σε κάποιο αξίωμα (π.χ. από δύο σημεία διέρχεται μια ευθεία) και όλη αυτή η διαδικασία γίνεται με σκοπό τη διαπίστωση για την ορθότητα μιας πρότασης (Εξαρχάκος, 1990).

Πορεία της απόδειξης στην ιστορία

3640-641 π.Χ.

Λαοί της εποχής αποκτούν μαθηματικές γνώσεις εμπειρικά. (π.χ. Οι Βαβυλώνιοι με το Πυθάγορειο Θεώρημα (Εξαρχάκος, 1990)

640 π.Χ. -240 μ.Χ.

Περίοδος Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών (Θαλής-Πυθαγόρας-Διόφαντος) Σταθμός της εποχής: Ευκλείδης με τα Στοιχεία (**Eves**, 1983)

Μεσαίωνας

Μικρή πρόοδος, και όχι στον τομέα της απόδειξης

19ος αιώνας

Ακμή στη Δύση (**Riemman, Galois, Lagrange**) αλλά όχι θεσμοθέτηση ορολογίας για την απόδειξη (**Krantz**, 2007)

20ος αιώνας

Hilbert: Παγκόσμιο πρότυπο γραφής (μεγάλο πλήθος μαθητών)
L. E. J. Brouwer: τοπολογία
Errett Bishop: Εις άτοπο απαγωγή

Η απόδειξη σήμερα

Μεγάλη ανάπτυξη Πληροφορικής → Μαθηματικά → Οι υπολογιστές με διάφορα λογισμικά μπορούν να αποδεικνύουν θεωρήματα

Αν και θεωρείται όμως πως οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές δεν μπορούν να αντικαταστήσουν τον ανθρώπινο εγκέφαλο (Schumann, 2001).

Σημαντικότητα της απόδειξης στη μάθηση των μαθηματικών

- Χωρίς την απόδειξη θα μπορούσαμε να εκτελούμε υπολογιστικές διαδικασίες (όπως υπολογιστική γεωμετρία).
- Όμως το νόημα των μαθηματικών είναι η ανακάλυψη νέων ιδεών και η επικύρωσή τους (Krantz, 2007).
- Άρα η απόδειξη προϋποθέτεται για την ύπαρξη των Μαθηματικών.

Η αναπαράσταση των μαθηματικών στη φύση

Ανάγκη πρώτων μαθηματικών εννοιών

Ξεκινώντας από την προϊστορική εποχή:

- Οι άνθρωποι έθεσαν κάποιες βασικές έννοιες (όπως οι φυσικοί αριθμοί).
- Και έπειτα με τις ανάγκες και την οικονομία κάθε κοινωνίας προσθέτονται κι άλλες έννοιες (προσθήκη αρνητικών αριθμών από τους Κινέζους)
- Αλλά όλη αυτή η πορεία μας κάνει να αναρωτιόμαστε για την χρησιμότητα των όρων

Πηγή: Courant&Robbins, 1996

Παράλογη αποτελεσματικότητα

- Ένα θέμα που απασχολεί αρκετά τους μαθηματικούς
- Κατά πόσο οι συνδέσεις των μαθηματικών με τη φύση είναι τυχαιές

Ιστορία σύνδεσης μαθηματικών με το σύμπαν

Ο πρώτος που πίστεψε ότι τα μαθηματικά περιγράφουν το σύμπαν

Πυθαγόρας

Αυτόι που θεμελίωσαν την άποψη του Πυθαγόρα

Kepler (Θεός= Μαθηματικά για την δημιουργία του σύμπαντος)

Γαλιλαίος (Φύση-Μαθηματική γλώσσα)

Βασίστηκαν σε αυτούς

Νεύτωνας, Einstein, Feymnan

Πηγή: Hamming, 1980

Χρησιμότητα των μαθηματικών

- Ανδιαμφισβήτη χρησιμότητα στις φυσικές επιστήμες
- Αλλά δημιουργείται το ερώτημα αν τα μαθηματικά υπάρχουν αποκλειστικά για την εξήγηση της φύσης, ή το αντίθετο
- Κλονιζέται, μέσα από την παράλογη αποτελεσματικότητα των μαθηματικών, η μοναδικότητα των φυσικών επιστημών

Πηγή: Wigner, 1967

Απόδειξη μαθηματικών με τη χρήση της Μηχανικής

Ιστορία φυσικών προσεγγίσεων των μαθηματικών

- Αρχιμήδης
- Μέθοδος εξάντλησης για υπολογισμούς όγκων

- Νεύτωνας
- Θεμελίωσε αυτή την προσέγγιση

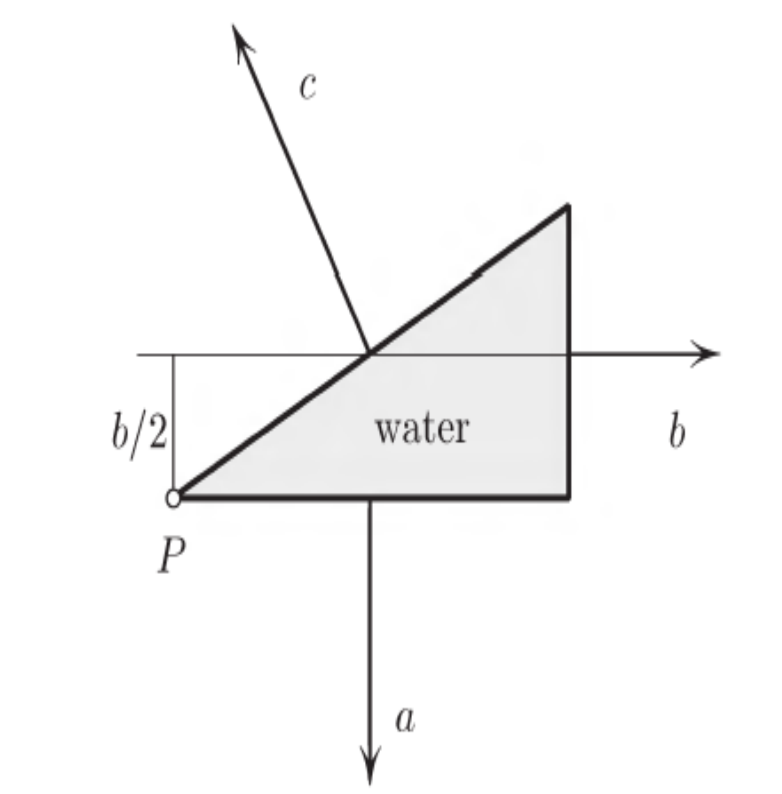
- Γνωστοί μαθηματικοί (όπως ο Riemman, ο Lagrange και ο Poincaré)
- Ακολούθησαν αυτές τις ιδέες

Πηγή: Levi, 2009

Πυθαγόρειο Θεώρημα

- Για το Π.Θ. (Το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας) θα ακολουθήσουν δύο αποδείξεις μηχανικής

$1^η$ απόδειξη



Σχήμα 1. Το τριγωνικό πρίσμα γεμισμένο με νερό και οι δυνάμεις που ασκούνται

- Κατασκευάζουμε ένα πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο είναι δοχείο που αργότερα θα προστεθεί νερό, σαν ενυδρείο.
- Τοποθετούμε το δοχείο έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που υπάρχει στο ένα άκρο της υποτείνουσας. Έπειτα προσθέτουμε το νερό. Οι ωθήσεις του νερού είναι προς 3 κατευθύνσεις
- .Άρα η ώθηση είναι το άθροισμα των 3 ροπών των δυναμικών πιέσεων. Η ροπή είναι το μέγεθος της δύναμης επί την απόσταση απ' τη γραμμή δύναμης στο σημείο περιστροφής.
- Άρα:

$$a \cdot \frac{a}{2} + b \cdot \frac{b}{2} - c \cdot \frac{c}{2} = 0,$$

- Δηλαδή προκύπτει το Πυθαγόρειο θεώρημα με τις κατάλληλες απλοποιήσεις

$2^η$ απόδειξη

- Έχουμε ένα ελατήριο που συμπιέζεται μεταξύ δύο ίσων μαζών, έτσι ώστε όταν απελευθερωθούν οι μάζες να πεταχτούν με ταχύτητα .
- Συνδέουμε τις δύο μάζες για να κρατηθεί το ελατήριο συμπιεσμένο και ύστερα πετάμε το σύστημα με ταχύτητα , και όσο βρίσκεται στον αέρα κόβουμε το σκοινί, που ενώνει τις μάζες, απελευθερώνοντας το συμπιεσμένο ελατήριο.
- Η τελική ταχύτητα της κάθε μάζας θα είναι c, η οποία είναι η υποτείνουσα ενός νοητού τριγώνου με κάθετες πλευρές την a και την b.

- Η κινητική ενέργεια των δύο μαζών σύμφωνα με τον νόμο του Einstein είναι

$$2 \cdot \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

- Η ενέργεια που χρειάστηκε για τα δύο τμήματα είναι

$$2 \cdot \frac{ma^2}{2} = ma^2$$

από την αρχική ώθηση και

$$2 \cdot \frac{mb^2}{2} = mb^2$$

από το ελατήριο
Άρα

$$mc^2 = ma^2 + mb^2.$$

που απλοποιώντας τα m, έχουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Επόμενο πρόβλημα

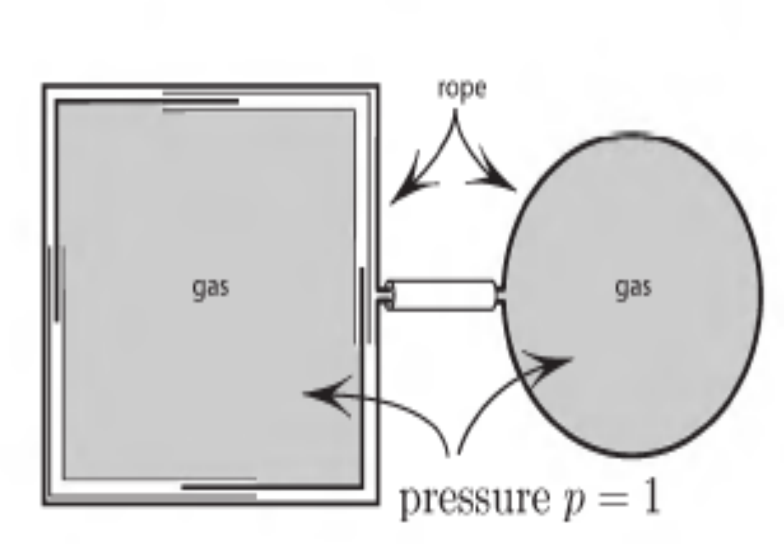
- Το επόμενο πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι η επίλυση μιας πλευράς του ισοπεριμετρικού προβλήματος, δηλαδή η εύρεση μέσω ενός μηχανικού μοντέλου των διαστάσεων ενός τετραγώνου που έχει δοσμένη περίμετρο και το μικρότερο δυνατό εμβαδόν.

Η μαθηματική απάντηση

- Η πλευρά του τετραγώνου, **x** πρέπει να είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου, **d**, δηλαδή ο κύκλος να είναι εγγεγραμμένος στο τετράγωνο.

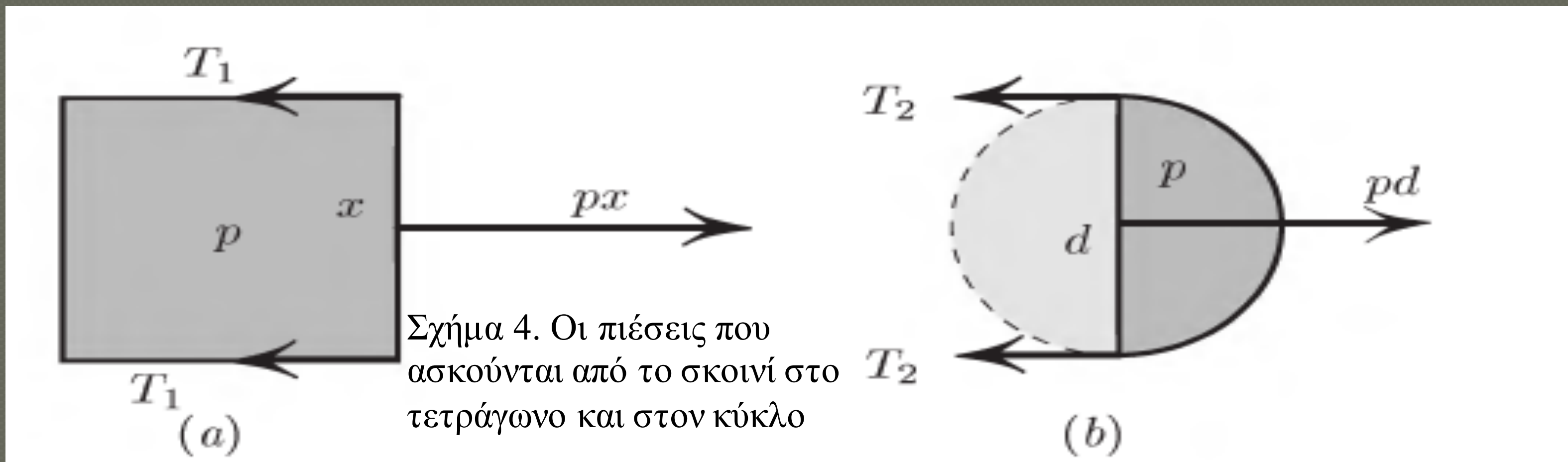
Μηχανικό σύστημα

- Το μηχανικό σύστημα που πρέπει να σκεφτούμε είναι ένα σκοινί που σχηματίζει έναν βρόχο. Μέρος αυτού του βρόχου είναι τυλιγμένο γύρω από ένα τετράγωνο και μέρος του από ένα κύκλο και το ενδιάμεσο τους μέρος να περνάει μέσα από ένα σωλήνα.
- Αέριο περικλείεται από το βρόχο και το αέριο προσπαθώντας να επεκταθεί, επειδή δεν μπορεί επ' αόριστον λόγω της μη επεκτασιμότητας του σχοινιού, η τάση είναι παντού η ίδια,(σ' όλη την επιφάνεια του σχοινιού) άρα και στο τετράγωνο και στον κύκλο. T1=T2



Σχήμα 3. Το μηχανικό ανάλογο με το τετράγωνο και τον κύκλο που είναι περιτριγυρισμένοι από σχοινί

Πιέσεις που ασκούνται

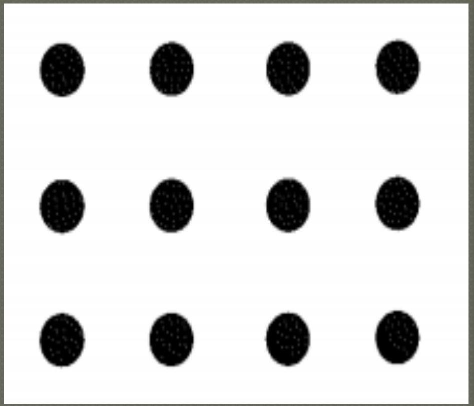


Σχήμα 4. Οι πιέσεις που ασκούνται από το σκοινί στο τετράγωνο και στον κύκλο

- Η δύναμη **px** του αερίου ωθεί την πλευρά του τετραγώνου εξισορροπώντας την 2T1. $2T_1 = px.$
- Ομοίως στον κύκλο η **pd** ωθεί στα δεξιά και το σχοινί στα αριστερά. $2T_2 = pd.$
- Άρα αφού T1=T2 $x = d;$

Η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού

- Δημιουργούμε μία ορθογώνια διαμόρφωση από βότσαλα.
- Η ιδέα είναι ότι επιλέγοντας δύο φυσικούς αριθμούς μπορούμε να παρατάξουμε κάποια βότσαλα όπου η έκταση που θα καλύπτουν θα είναι το γινόμενο των δύο αριθμών.
- Αν στρέψουμε αυτό το σχήμα 90 μοίρες θα εμφανιστεί ένα σχήμα που θα καταλαμβάνει την ίδια έκταση αλλά θα είναι αντιστρεμμένο το μήκος με το πλάτος.



Σχήμα 6. Η ορθογώνια διαμόρφωση με τα βότσαλα

Διδακτική αξία

- Μέσω των μοντέλων που δημιουργούνται είναι πιο εύκολη η κατανόηση δύσκολων φαινομένων και εννοιών.
- Η δημιουργία του μοντέλου και η αντίδραση σε αυτό είναι τα στάδια της κατανόησης του θεωρητικού πλαισίου με αυτή τη μέθοδο διδασκαλίας
- Για τους μαθητές η οπτικοποίηση των εννοιών είναι πολύ πιο βοηθητική από τις αφηρημένες και μη απτές έννοιες.

  Ειδικότερα στη μάθηση της Γεωμετρίας είναι πολύ πιο σημαντική η οπτικοποίηση και η χρησιμοποίηση συστημάτων Μηχανικής για την αποφυγή της αξιωματικής μάθησης.

Αποτελέσματα

- Σημαντικότητα της απόδειξης για την συνέχιση ύπαρξης των θεωρητικών μαθηματικών
- Μοναδικότητα των μαθηματικών αλλά και χρησιμότητά τους στις άλλες επιστήμες
- Σύνδεση μαθηματικών με το φυσικό κόσμο γιατί όχι μόνο μπορούν να τον περιγράψουν αλλά και να περιγραφούν απ' αυτόν, χρησιμοποιώντας τις φυσικές επιστήμες.

Σύγκριση αποδείξεων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

- Παγκόσμια αποδοχή
- Αυστηρότητα στον τρόπο γραφής

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

- Λίγες ή καθόλου πράξεις
- Λίγα βήματα για την επίλυση
- Περαιτέρω ανακαλύψεις
- Λιγότερο γνωστικό υπόβαθρο
- Διαφορετικοί τρόποι σκέψεις και ικανότητες αναπτύσσονται για τους μαθητές